# Elementos básicos del Álgebra Lineal: Subespacios Lineales

Prof. Miguel Ángel Norzagaray Cosío
Universidad Autónoma de Baja California Sur
manc@uabcs.mx

8 de junio de 2023

## Índice

**1. Introducción** **1**

**2. Subespacios de columnas** **2**

**3. Subespacios nulos** **3**

**4. Conclusiones** **5**

**Resumen**

Los subespacios lineales es un concepto abstracto que aglutina conocimientos en Álgebra Lineal. La separación del espacio de vectores en subespacios con su propio rango permite entender mejor la manera como las matrices transforman vectores, en especial los espacios de columnas de una matriz y sus espacios nulos.

**Palabras clave:** subespacio, rango, base, transformación.

## 1. Introducción

Los subespacios de vectores son un concepto de la mayor relevancia en Álgebra Lineal (AL). Cada matriz posee 4 subespacios importantes: el de columnas, el de renglones y los espacios nulos de columnas y renglones.

La relación entre los cuatro subespacios constituye el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal (TFAL). Fue planteado como tal en 1993 en [3] y desde entonces ha sido referenciado muchas veces como tal. Es conocido también como el teorema del rango o de los cuatro espacios[1].

[1] Un tratamiento más detallado y reciente se encuentra en [1].

Se pueden adelantar dos cosas: 1 - quien sabe bien de AL, puede resolver una variedad mayor de problemas que con otras áreas de la matemática y 2- comprender el TFAL permite hacer uso ventajoso del AL, una herramienta poderosa aún sin conocer el TFAL.

## 2. Subespacios de columnas

Ya en [2], el inicio de esta serie de Elementos Básicos del Álgebra Lineal se definió el concepto de espacio generado. Se reproduce aquí de nuevo: el espacio generado por un conjunto de vectores son todas sus combinaciones lineales. Para el caso de dos vectores $u$ y $v$, se tiene

$$\text{gen}(u, v) = \{au + bv, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}$$

con $a$ y $b$ escalares arbitrarios.

El anterior fue un espacio generado por dos vectores, pero de manera más general, el espacio puede generarse por $r$ vectores $U = \text{gen}(u_1, u_2, \ldots, u_r)$. Si todos son linealmente independientes, entonces la dimensión del espacio será $r$, si hay uno o varios que se pueden formar como combinación lineal del resto, la dimensión de $U$ será menor que $r$.

Si la matriz $M$ se forma concatenando los vectores de $U$, $M = [u_1 u_2 \cdots u_r]$, entonces se dice que el *espacio de columnas* de $M$ es el espacio $\text{gen}(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ y se escribe

$$\mathcal{C}(M) = \text{gen}(u_1, u_2, \ldots, u_r). \tag{1}$$

Por ejemplo, la matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ definida como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 5 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & -10 \\ 2 & 5 & 0 & 12 & -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

tiene la siguiente forma reducida escalonada por renglones:

$$\text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Es claro que $A$ solo tiene 3 columnas linealmente independientes, las primeras, por lo que su espacio de columnas es

$$\mathcal{C}(A) = \text{gen}\left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

© 2023 DASC/manc

y las últimas dos columnas son combinación lineal de las tres primeras. También puede decirse que esas columnas están en el espacio generado por las tres primeras.

Se observa que $\mathcal{C}(A)$ es un subespacio de dimensión 3 y está contenido en $\mathbb{R}^4$ pues cada vector columna es de dimensión 4.

De los renglones se puede decir algo similar. A partir de $\text{rref}(A)$ se sabe que el cuarto renglón es combinación de los tres primeros, que son los linealmente independientes. Para seguir pensando (visualizando) en columnas, ahora se trabaja con la transpuesta $A^\intercal$.

$$A^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 8 & -3 & 4 & 12 \\ 5 & 7 & -10 & -1 \end{bmatrix}$$

y a partir de $\text{rref}(A)$ se entiende que la dimensión del espacio generado por los renglones también es 3.

Como los renglones de $A$ son las columnas de $A^\intercal$, se prefiere analizar el espacio de columnas de $A^\intercal$ y mantener la terminología. Se entiende que el espacio de columnas de $A^\intercal$ es el espacio de renglones de $A$.

$$\mathcal{C}(A^\intercal) = \text{gen}\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} \right)$$

Se observa que $\mathcal{C}(A^\intercal)$ es un subespacio de dimensión 3 y está contenido en $\mathbb{R}^5$.

La dimensión de los dos subespacios es la misma: $\dim(\mathcal{C}(A^\intercal)) = \dim(\mathcal{C}(A))$ y siempre es así, pero eso es algo que habría que demostrar en general, no confiar en un simple ejemplo.

## 3. Subespacios nulos

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz. Hay otro subespacio asociado a $A$ que está formado por todos los vectores $x$ que cumplen con ser transformados en el vector cero por la matriz, es llamado *espacio nulo* y se denota como

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que } Ax = 0\} \tag{4}$$

En el caso de las matrices que tienen inversa, el único vector que lo cumple es el cero pues $A0 = 0$, así que es el único elemento del espacio nulo (el cero siempre está en el espacio nulo). Para matrices no invertibles, como la matriz (2) de la sección anterior, el espacio nulo tiene más vectores.

Sea ahora la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \tag{5}$$

© 2023 DASC/manc 

que convierte vectores de $\mathbb{R}^3$ en vectores en $\mathbb{R}^2$. Puede observarse que si se multiplica $A$ por cualquier vector de la forma $v = [t, 2t, t]^\intercal$ el resultado siempre será cero pues

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - 2t + t \\ t + 4t - 5t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

así que el espacio nulo de $A$ son todos los vectores en la dirección de $v$:

$$\mathcal{N}(A) = \{t \times (1, 2, 1), \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

aunque generalmente se prefiere escribir $(t, 2t, t)$. En el caso de esta matriz, el espacio nulo es generado por un solo vector, así que $\mathcal{N}(A)$ es de dimensión 1.

Si se retoma la matriz $A$ del primer ejemplo (2), esta resultó ser de rango 3. El subespacio $\mathcal{N}(A)$ es fácil de calcular, es directo a partir de $\text{rref}(A)$, ecuación (3), donde se ve que hay dos columnas libres y son las que determinan al subespacio $\mathcal{N}(A)$, que tiene dimensión 2.

A cada una de las últimas dos columnas falta cambiarles el signo, agregarles los valores que permitan completar la cantidad de columnas y diferenciarlas, para obtener los vectores generadores. Así se tiene el subespacio nulo:

$$\mathcal{N}(A) = \text{ gen} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

y otra manera de decirlo es que las combinaciones lineales de los dos vectores $(-r, -2r, -r, r, 0)$ y $(3s, -s, -2s, 0, s)$ son $\mathcal{N}(A)$, un hiperplano en $\mathbb{R}^5$.

El segundo subespacio nulo es el que corresponde al espacio de renglones, o a $A^\intercal$ y se trata de los vectores que al multiplicarse por $A$ el resultado es cero:

$$\mathcal{N}(A^\intercal) = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que } A^\intercal x = 0\} \tag{6}$$

Falta conocer $\text{rref}(A^\intercal)$ para determinar este espacio.

$$\text{rref}(A^\intercal) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

De manera directa se puede determinar $N(A^\intercal)$:

$$\mathcal{N}(A^\intercal) = \text{ gen} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

© 2023 DASC/manc 

Recapitulando, en la matriz (2) de $4 \times 5$, el rango fue de 3, así que la dimensión de $\mathcal{C}(A)$ es 3, al igual que la de $\mathcal{C}(A^\intercal)$. Los subespacios que completan las dimensiones son los nulos:

$$\dim(\mathcal{C}(A)) + \dim(\mathcal{N}(A^\intercal)) = 3 + 1 = 4 \tag{8}$$
$$\dim(\mathcal{C}(A^\intercal)) + \dim(\mathcal{N}(A)) = 3 + 2 = 5 \tag{9}$$

que es lo que se plantea en la primera parte del *Teorema Fundamental del Álgebra Lineal* (TFAL).

## 4. Conclusiones

Los cuatro asociados asociados a una matriz, $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{C}(A^\intercal)$, $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{N}(A^\intercal)$, descubren la manera como la matriz transforma vectores de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ y nos dan mejor comprensión de la ecuación $Ax = b$ y sistemas similares. El TFAL es un teorema que concentra información de gran utilidad en la resolución de problemas lineales.

## Referencias

[1] Lu, J. Revisit the Fundamental Theorem of Linear Algebra, 2021. 1

[2] Norzagaray-Cosío, M. A. Elementos Básicos del Álgebra Lineal: Vectores. Lecturas para estudiantes, May 2023. 2

[3] Strang, G. The Fundamental Theorem of Linear Algebra. *The American Mathematical Montly 100*, 9 (Nov. 1993), 848–855. 1

© 2023 DASC/manc 